# Warnhinweis

**Bei diesen „Lösungen“ handelt es sich um Lösungsskizzen, Ansätze und Endergebnisse. Die „Lösungen“ können nicht als Muster für Klausur-Lösungen angesehen werden. Außerdem wurden die „Lösungen“ nicht noch einmal auf ihre Richtigkeit kontrolliert und können Fehler enthalten.**

**Diese „Lösungen“ dienen lediglich zum Abgleich eurer Ergebnisse. Wenn ihr unsicher seid, fragt lieber noch einmal nach.**

# Grundlagen-Lösungen

**1. Aufgabe:** (*Vollständige Induktion*)

**a)** Induktionsanfang n=1:

$$\sum_{i=1}^{1} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

Induktionsschritt: Angenommen die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^{n} i + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\
&= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2)}{2}
\end{aligned}$$

$\square$

**b)** Hier fehlt im Beweis der Induktionsanfang.
Die Behauptung ist natürlich für kein $n \in \mathbb{N}$ erfüllt und damit ist auch der Beweis falsch.

**c)** Induktionsanfang n=2:

$$\sum_{k=2}^{2} \frac{2k-3}{3^k} = \frac{2*2-3}{3^2} = \frac{1}{9} = \frac{3}{9} - \frac{2}{9} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2}$$

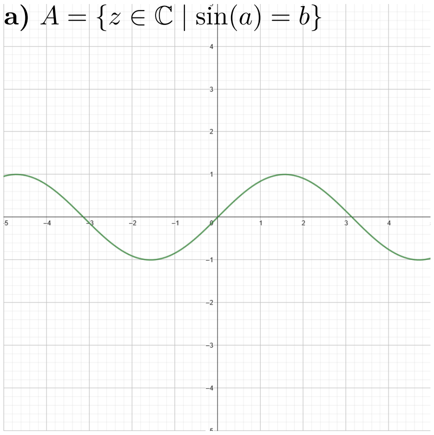
Induktionsschritt: Angenommen die Behauptung stimmt für ein $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} \frac{2k-3}{3^k} &= \sum_{k=2}^{n} \frac{2k-3}{3^k} + \frac{2(n+1)-3}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} + \frac{2(n+1)-3}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{n}{3^n} + \frac{2n-1}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{3n}{3^{n+1}} + \frac{2n-1}{3^{n+1}} \\
&= \frac{1}{3} - \frac{n+1}{3^{n+1}}
\end{aligned}$$

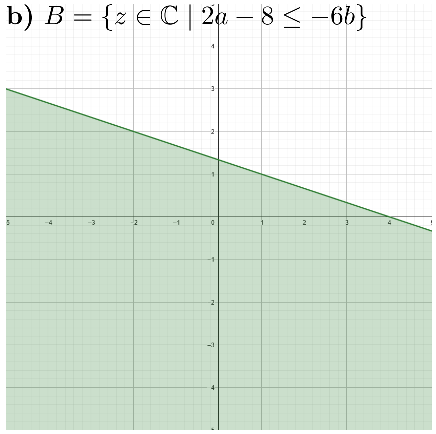
$\square$

**2. Aufgabe:** (*Darstellung komplexer Zahlen*)

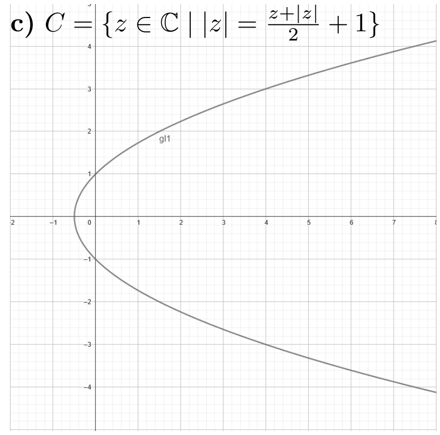
**a)** $A = \{z \in \mathbb{C} \mid \sin(a) = b\}$



**b)** $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 2a - 8 \leq -6b\}$



**c)** $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = \frac{z+|z|}{2} + 1\}$



**3. Aufgabe:** (*Ungleichungen*)

**a)** $x \in [\frac{2}{3}, 4]$

**b)** $x \in \mathbb{R} \wedge x \notin (-2, 8)$

**c)** $x \in \mathbb{R}$

**4. Aufgabe:** (*Mengen*)

**a)** $sup(A) = \sqrt{2}$, da $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, wird das Supremum nicht angenommen und damit existiert kein Maximum. Analog $inf(A) = -\sqrt{2}$ und es existiert kein Minimum.

**b)** $B = (-\infty, -3)$, damit ist $sup(B) = -3$, es existiert kein Maximum. Nach unten ist die Menge nicht beschränkt, damit existieren weder Infimum noch Minimum.

**c)** $sup(C) = max(C) = \sqrt{2}$ und $inf(C) = 0$, Minimum existiert nicht.

# Folgen - Lösungen

(A1) a) $a_1 = \frac{6-1^2}{6\cdot 1^2} = \frac{5}{6}$ $\quad a_2 = \frac{6-2^2}{6\cdot 2^2} = \frac{6-4}{6\cdot 4} = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

$a_3 = \frac{6-3^2}{6\cdot 3^2} = \frac{6-9}{6\cdot 9} = -\frac{3}{54}$

Beh: Die Folge $(a_n)$ ist monoton fallend. (sogar streng!)

Bew.: Es ist $a_{n+1} = \frac{6-(n+1)^2}{6\cdot(n+1)^2} = \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{6} < \frac{1}{n^2} - \frac{1}{6} = \frac{6-n^2}{6\cdot n^2} = a_n$

Beh.: Die Folge ist nach oben und unten beschränkt.

Bew.: Da die Folge monoton fallend ist, ist sie nach oben durch $a_1$ beschränkt. Nach unten ist sie durch $-\frac{1}{6}$ beschränkt, da für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_n = -\frac{1}{6} + \frac{1}{n^2} \geq -\frac{1}{6}$.

b) $b_1 = a_1 = \frac{5}{6}$ $\quad b_2 = a_1 + a_2 = \frac{5}{6} + \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$ $\quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{93}{108}$

Beh.: $(b_n)$ ist nicht monoton.

Bew.: Es gilt: $b_1 < b_2$ und $b_2 > b_3$.

Beh.: $(b_n)$ ist nach oben beschränkt, aber nicht nach unten.

Bew.: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k}_{<0} < a_1 + a_2$

Also ist $(b_n)$ nach oben beschränkt.

Weiter gilt:

$$b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{6-k^2}{6\cdot k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \frac{1}{6}$$

$$= \underbrace{n\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)}_{\to -\infty} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Da $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ für $n \to \infty$ gegen einen GW konvergiert und $\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\right) = -\infty$, ist $(b_n)$ nicht nach unten beschränkt.

c) $(a_n)$ ist konvergent, da monoton + beschränkt.

$(b_n)$ ist nicht konvergent, da nicht beschränkt.

A2

a) $$a_n = \frac{n+1}{n+4} = \frac{n\cdot(1+\frac{1}{n})}{n\cdot(1+\frac{4}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

b) $$b_n = \frac{6n^2+n}{4n^3-6} = \frac{n^2\cdot(6+\frac{1}{n})}{n^2\cdot(4n-\frac{6}{n^2})} = \frac{6+\frac{1}{n}}{4n-\frac{6}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

c) $$c_n = \sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})$$

$$= \frac{\sqrt{n}\cdot(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})\cdot(\sqrt{n+2}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}$$

$$= \frac{\sqrt{n}\cdot(n+2-n)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}\cdot 2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}} = \frac{2\cdot\cancel{\sqrt{n}}}{\cancel{\sqrt{n}}\cdot\left(\sqrt{\frac{n+2}{n}}+1\right)}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{2} = 1$$

d) $$d_n = \frac{2n+\sin(n)}{4n+2} \leq \frac{2n+1}{4n+2} = \frac{\cancel{n}\cdot(2+\frac{1}{n})}{\cancel{n}\cdot(4+\frac{2}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$d_n = \frac{2n+\sin(n)}{4n+2} \geq \frac{2n}{4n+2} = \frac{2\cancel{n}}{\cancel{n}\cdot(4+\frac{2}{n})} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Nach Sandwich-Kriterium konvergiert $d_n$ gegen $\frac{1}{2}$.

e) $$e_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n} = \left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \xrightarrow{n\to\infty} (e^{-1})^2 = \frac{1}{e^2}$$

Erinnerung
$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x$$

f) $$f_n = \sqrt[n]{4n+4^n} \leq \sqrt[n]{4^n+4^n} = \sqrt[n]{2\cdot 4^n} = \sqrt[n]{2}\cdot\sqrt[n]{4^n}$$
$$= \sqrt[n]{2}\cdot 4 \xrightarrow{n\to\infty} 4$$

$$f_n = \sqrt[n]{4n+4^n} \geq \sqrt[n]{4^n} = 4$$

Nach Sandwich konvergiert $(f_n)$ gegen 4.

g) $g_n = \frac{1+2^n}{1+2^n+(-2)^n} = \frac{\cancel{2^n}\cdot(\overbrace{\frac{1}{2^n}}^{\to 0}+1)}{\cancel{2^n}(\underbrace{\frac{1}{2^n}}_{\to 0}+1+(-1)^n)}$

Ist $n$ gerade, so gilt $g_n = \frac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{1}{2^n}+2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$

Ist $n$ ungerade, so gilt $g_n = \frac{\frac{1}{2^n}+1}{\frac{1}{2^n}} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$

Somit ist $g_n$ nicht konvergent

h) $h_n = \frac{1}{n}\cdot i^n = \begin{cases} \frac{1}{n} & : n \text{ durch } 4 \text{ teilbar} \\ \frac{1}{n}\cdot i & : n-1 \text{ durch } 4 \text{ teilbar} \\ -\frac{1}{n} & : n-2 \text{ durch } 4 \text{ teilbar} \\ -\frac{i}{n} & : n-3 \text{ " " "} \end{cases}$

Das braucht man eigentlich nicht

Nun ist $|h_n| = |\frac{1}{n}|\cdot|i^n| = |\frac{1}{n}|\cdot 1 = \frac{1}{n}$

Wegen $|h_n| \xrightarrow{n\to\infty} 0$, ist $(h_n)$ eine Nullfolge.

A3) Beh.: $(a_n)$ ist monoton wachsend.

Bew.: mit vollständiger Induktion.

- IA: $a_1 = 1 - \frac{1}{2+a_0} = 1 - \frac{1}{2+0} = \frac{1}{2} > 0 = a_0$
- IV: Für ein $n\in\mathbb{N}$ gelte: $a_{n+1} > a_n$
- IS: z.z.: $a_{n+2} > a_{n+1}$

  Es ist $a_{n+2} = 1 - \underbrace{\frac{1}{2+a_{n+1}}}_{>0} \overset{IV}{>} 1 - \frac{1}{2+a_n} = a_{n+1}$

Beh.: $(a_n)$ ist nach oben beschränkt.

Bew.: Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt: $a_{n+1} = 1 - \overbrace{\frac{1}{2+a_n}}^{>0} \leq 1$

$\Rightarrow$ Somit ist $(a_n)$ konvergent. Sei $a$ der Grenzwert. Dann muss gelten:

$a = 1 - \frac{1}{2+a} \Leftrightarrow a\cdot(2+a) = 2+a-1 \Leftrightarrow 2a+a^2 = 1+a$

$\Leftrightarrow a+a^2-1 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{5}{4}}$ oder $a = -\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}}$

Da $a_1 = \frac{1}{2}$ und $(a_n)$ monoton wachsend ist, muss $a > \frac{1}{2}$ sein. Somit ist

$$a = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$$

**A4** a) $(a_n)$ hat die Häufungspunkte

$\frac{1}{2}$, $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $1$

$\frac{1}{2}$ ← liminf, $1$ ← limsup

b) $b_n$ hat die Häufungspunkte

$-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$

$-\frac{1}{2}$ ← liminf, $\frac{1}{2}$ ← limsup

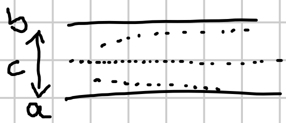
Lösungs-Skizze

c) $c_n$ hat den HP 1000, sonst keine.

liminf = limsup

**A5** a) <u>Beweis</u>: Sei o.B.d.A. $a < b$ und somit $\min\{a,b\} = a$.

Sei $c := b - a$. Sei $\varepsilon := \frac{c}{2}$. Dann gibt es ein




$N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $b_n$ und $a_n$ mit $n \geq N$ gilt:

$|b_n - b| < \frac{c}{2}$ und $|a_n - a| < \frac{c}{2}$. Daraus folgt

$b_n > b - \frac{c}{2}$ und $a_n < a + \frac{c}{2} = b - c + \frac{c}{2} = b - \frac{c}{2}$

$$\Rightarrow \forall n \geq N: \quad a_n < b_n$$

$$\Rightarrow \forall n \geq N: \quad \min\{a_n, b_n\} = a_n$$

Somit konvergiert $\min\{a_n, b_n\} = a_n$ gegen $a = \min\{a,b\}$.

b) Hilfsbehauptung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > 0$.

Beweis: IA: $a_1 = 1 > 0$ IV: Sei $a_n > 0$ für ein $n \in \mathbb{N}$. IS: $a_{n+1} = \underbrace{a_n^2}_{>0} + \underbrace{a_n}_{>0} > 0$

Es ist $a_{n+1} = a_n^2 + a_n = a_n \cdot \underbrace{(a_n + 1)}_{>0} > a_n$. Also ist die Folge monoton wachsend.

Weiter ist $|a_{n+1} - a_n| = |a_n^2 + a_n - a_n| = |a_n^2| \overset{\text{monoton wachsend}}{\geq} a_1^2 = 1$

Somit handelt es sich um <u>keine</u> Cauchy-Folge und die Folge ist auch nicht konvergent.

# Reihen

1) a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{101}}{10^n}$ konv nach WK.

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{n^{101}}{10^n}\right|} = \frac{1^{101}}{10} = \frac{1}{10} < 1 \Rightarrow \text{konv.}$$

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ div

Es ist $\sin^n\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}n\right) = \begin{cases} 1, & n = 1,5,9,\dots \\ -1, & n = 3,7,11,\dots \\ 0, & n \text{ gerade} \end{cases}$

Also $\sum_{n=2}^{\infty} \sin^n\left(\frac{\pi}{2}n\right) = 0 - 1 + 0 + 1 + 0 - 1 \dots$

$\Rightarrow$ unbestimmt div.

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konv nach WK

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \limsup_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{e} < 1 \Rightarrow \text{konv.}$$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+4}{n} \frac{1}{2^n}$ konv nach QK

$$\frac{(n+5)!}{(n+1)!\,4!\,2^{n+1}} \cdot \frac{n!\,4!\,2^n}{(n+4)!} = \frac{n+5}{(n+1)\cdot 2} \le \frac{9}{10} < 1, \forall n \ge 4 \Rightarrow \text{konv.}$$

e) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{(-1)^n - n}$ konv nach WK (nicht nach QK!)

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^{(-1)^n - n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|2^{1-n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{2}{2^n}} = \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{konv.}$$

f) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)\cdot\ln(n+1)}$ konv (ist Teleskopsumme)

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(\frac{n+1}{n})}{\ln(n)\ln(n+1)} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$$

Ist Teleskopsumme, da

$$a_{n+1}-a_n = \frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)\ln(n+2)} - \frac{\ln(n+1)}{\ln(n+1)\ln(n+2)} + \frac{\ln(n+1)}{\ln(n)\ln(n+1)} - \frac{\ln(n)}{\ln(n)\ln(n+1)}$$

$$= \frac{1}{\ln(n+1)} - \frac{1}{\ln(n+2)} + \frac{1}{\ln(n)} - \frac{1}{\ln(n+1)}$$

Also: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\ln(n)\ln(n+1)} = \frac{1}{\ln(2)} - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln(n+1)} = \underline{\underline{\frac{1}{\ln(2)}}}$ $\Rightarrow$ konv

g) $k\in\mathbb{N}_0$ $\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k}^{-1}$ konv für $k\geq 2$, div für $k\in\{0,1\}$

$$\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}^{-1} = k!\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(n-k)!}{n!} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} 1 & , k=0 \Rightarrow \text{div} \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} & , k=1 \Rightarrow \text{div (harm. Reihe)} \\ \underbrace{2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(n-2)!}{n!}}_{=:A} = 2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)} < 2\cdot\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n-1)^2} & , k=2 \\ \qquad \Rightarrow \text{konv} \end{cases}$$

Für $k>2$ ist $A$ ein konv Majo.

h) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-i)^n}{2^n}$ konv nach Majo

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1-i)^n}{2^n} \leq \sum_{n=0}^{\infty}\left|\frac{(-1-i)^n}{2^n}\right| = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2})^n}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}\right)$$

$\Rightarrow$ konv

12

i) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sqrt[n]{n}}{n}$ Konv nach LK

Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ & $\lim_{n\to\infty} n = \infty$, also $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n} = 0$

Die Folge ist streng mon fall

$\frac{\sqrt[n]{n}\,(n+1)}{\sqrt[n+1]{n+1}\;n} \geq \sqrt[n+1]{\frac{n}{n+1}}\;\frac{n+1}{n} > 1 \;\; \forall n \in \mathbb{N}$ $\Rightarrow$ konv. nach Leibniz

j) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n-1}}{n^{\log(n)}}$ konv nach Majo

$\frac{\sqrt[n]{n-1}}{n^{\log(n)}} \leq \frac{\sqrt[n]{n-1}}{n^2} \leq \frac{\sqrt[n]{n}+1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}+1}{n^2}$ konv

2) a) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{6}{(k+5)(k+4)} = 6 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \Big[ \underbrace{\frac{k+5}{(k+5)(k+4)}}_{a_{k+1}} - \underbrace{\frac{k+4}{(k+5)(k+4)}}_{a_k} \Big]$

Teleskopsumme: $= 6 \cdot \left(\frac{1}{6} - 0\right) = 1$ //

b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} = \frac{1}{2(1-\frac{1}{\pi})} = \frac{\pi}{2\pi - 1}$ // geom. Reihe.

c) siehe 1f) $\frac{1}{\ln(2)}$ //

d) $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n \left(\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{a_k} - \underbrace{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}_{a_{k+1}}$

Teleskopsumme: $\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k - a_{k+1} = \frac{1}{2}(2 - e) = 1 - \frac{e}{2}$ //

$\boxed{3}$

3) Es ist

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}}_{=S} = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2}}_{= \frac{1}{2^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{4} \cdot S} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}}_{=: X}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{4} S + X \Rightarrow X = \frac{3}{4} S.$$

4) z.B. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ mit $a_k = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^k & k \text{ ger} \\ \left(\frac{1}{3}\right)^k & k \text{ unger} \end{cases}$

$$\Rightarrow \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \begin{cases} \left(\frac{2}{3}\right)^k & , k \text{ ger} \\ \left(\frac{3}{2}\right)^k & , k \text{ unger} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \limsup_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \limsup_{k \to \infty} \left(\frac{3}{2}\right)^k = \infty$$

Aber Reihe konv nach Wk

$$\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \begin{cases} \frac{1}{2} & , k \text{ ger} \\ \frac{1}{3} & , k \text{ unger} \end{cases} \qquad \frac{1}{3} < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \text{konv.}$$

5) Für welche $\alpha$ ist

$$\limsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{8^n}{n} (\alpha - 2)^n \right|} < 1 \; ?$$

$$\Rightarrow 8 \cdot |\alpha - 2| < 1$$

$$\Rightarrow |\alpha - 2| < \frac{1}{8}$$

4

6) a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n^n}{n!} x^n$

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)(n+1)^n n!}{(n+1)\, n!\, n^n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{e}$$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (4n^3 - 3n^4) x^n$

$$\frac{4(n+1)^3 - 3(n+1)^4}{4n^3 - 3n^4} = \underbrace{\frac{(n+1)^4}{n^4}}_{\to 1} \cdot \underbrace{\frac{\frac{4}{n+1} - 3}{\frac{4}{n} - 3}}_{\to \frac{-3}{-3} = 1} \to 1 \Rightarrow R = 1.$$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{n^n}\, x^n$

$$\left(\sqrt{n^n}\right)^{1/n} = \left(n^{\frac{n}{2}}\right)^{1/n} = (n)^{\frac{1}{2}} \to \infty \quad (n \to \infty) \Rightarrow R = 0$$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (1 + n^2 2^n)^n$

$$2 = (2^n)^{1/n} \le (1 + n^2 2^n)^{1/n} \le (2n^2 2^n)^{1/n} = 2\sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^2 \to 2 \quad (n \to \infty)$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

5

# Mathenacht WS2022/23 Funktion

Dienstag, 10. Januar 2023 10:36

**1. Aufgabe:**

Kreuze die richtigen Aussagen an und widerlege die falschen Behauptungen.

- ☒ Es gibt eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion mit Bild $\mathbb{R}\backslash\{0\}$. siehe $\frac{1}{x}$
- ☐ Es gibt keine Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$, welche eine Umkehrfunktion besitzt, aber nicht monoton ist. $f(x) = \begin{cases} x : x \neq 1 \\ -1 : x = 1 \end{cases}$
- ☒ Sei $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt: $\forall x, y \in [-1,1] : |f(x) - f(y)| \leq 2|x-y| \implies f$ ist stetig. **(Nur für BA)** siehe Lipschitzstetig
- ☐ Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wenn $|f|$ auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar ist, dann ist auch $f$ auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar. **(Nur für BA)** $f(x) := \begin{cases} 1 : x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} \\ -1 : x \in \mathbb{Q} \end{cases}$
- ☒ Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und gilt $f(b) = 3f(a)$, so gibt es ein $\xi \in (a,b)$ mit $f(\xi) = 2f(a)$. siehe MWS
- ☐ Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige und differenzierbare Funktion. Dann gilt: $f:[-2,3] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$

$$\exists x_0 \in [a,b] : f'(x_0) = 0 \implies f(a) = f(b)$$ $f'(0) = 0$, aber $f(-2) = -8 \neq 27 = f(3)$

## 2. Aufgabe:

Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = e^{6x^2 - 15x + 4}$.

**a)** Untersuche die Funktion auf Monotonie. Wo ist sie monoton wachsen und wo monoton fallend?

fällt auf $(-\infty, \frac{5}{4})$, wächst auf $[\frac{5}{4}, \infty)$

**b)** Gibt es konvexe Abschnitte auf der Funktion? Wenn ja, beweise die Konvexität auf dem Abschnitt.

Ja, $[\frac{5}{4}, \infty)$. Sei $g : [\frac{5}{4}, \infty) \to \mathbb{R},\ g(x) := 6x^2 - 15x + 4$. Dann gilt

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ f = \exp \circ g \text{ und } \exp \text{ mon. wachs.} \\ \cdot\ g \text{ konvex, da bestehend aus Summe konv. Fkten} \end{array}\right\} \Rightarrow f \text{ konvex}$$

**c)** Bestimme die Maxima und Minima der Funktion, sofern diese existieren.

Maxima existieren keine, Minimum bei $x_{min} = \frac{5}{4}$

**d)** Bestimme den Definitionsbereich, den Wertebereich und $\lim_{x\to\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)$

DB: $\mathbb{R}$, WB: $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{6x^2-15x+4} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{x^2(6 - \frac{15}{x} + \frac{4}{x^2})} = \infty$ e stetig, $\frac{1}{x} \to 0$ für $x \to +\infty$ und $x \to -\infty$

## 3. Aufgabe: (*Nur für BA*)

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare und streng monoton wachsende Funktion. Sei $g$ die Umkehrfunktion von $f$ und sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f'(x_0) \neq 0$. Dann gilt laut Vorlesung für $y_0 = f(x_0)$:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

Beweise die Formel mithilfe der Kettenregel. Hierbei darf die Differenzierbarkeit der Umkehrabbildung vorausgesetzt werden.

· $f: I \to \mathbb{R}$ diffbar und str. m.w. ($I$ nicht leeres Intervall)

$\Rightarrow \exists g := f^{-1}: f(I) \to I$

Sei $x_0 \in I$ und $y_0 := f(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$. Da Diffbarkeit von $g$ vorausgesetzt

werden kann in $y_0$, ex.:

$$g'(y_0) = \lim_{\substack{y \to y_0 \\ y \in f(I) \\ y \neq y_0}} \frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0} = \lim \frac{g(y)-g(y_0)}{f(g(y))-f(g(y_0))} = \lim \left(\frac{f(g(y))-f(g(y_0))}{g(y)-g(y_0)}\right)^{-1},$$

wobei $g$ str. m. $\Rightarrow g(y) \neq g(y_0) \Rightarrow g(y)-g(y_0) \neq 0$

Da $g$ stetig und $g(y_0) = g(f(x_0)) = x_0$ ist $\lim\limits_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) = x_0$

$$\overset{f'(x_0)\neq 0}{\Rightarrow} g'(y_0) = \lim \left(\frac{f(g(y))-f(g(y_0))}{g(y)-g(y_0)}\right)^{-1} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(g(y_0))}$$

$\blacksquare$

**4. Aufgabe:**

Sei $f : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x|x^\alpha|}{4+x^2} & \text{für} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \end{cases}$$

mit $\alpha \in \mathbb{Z}$.

a) Untersuche für welche $\alpha \in \mathbb{Z}$ die Funktion $f$ stetig, bzw. differenzierbar ist. Gib $f'(x)$ an, falls existent.

$\alpha \geq 0$: Stetigkeit erfüllt, da jede Komponente stetig.

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{x|x^\alpha|}{4+x^2} - 0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x^\alpha|}{4+x^2} \overset{\alpha \geq 0}{=} 0 \Rightarrow \text{diffbar in } x_0 = 0$$

Diffbarkeit trivialerweise in $x_0 \neq 0$ erfüllt

$$x \geq 0: \; f'(x) = \frac{(\alpha+1)x^\alpha(4+x^2) - x^{\alpha+1} \cdot 2x}{(4+x^2)^2} = \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{4+x^2} - \frac{2x^{\alpha+2}}{(4+x^2)^2}$$

$$x < 0: \; f'(x) = \frac{-(\alpha+1)x^\alpha(4+x^2) + x^{\alpha+1} \cdot 2x}{(4+x^2)^2} = \frac{2x^{\alpha+2}}{(4+x^2)^2} - \frac{(\alpha+1)x^\alpha}{4+x^2}$$

$\alpha = -1$: $f(x) = \frac{x\left|\frac{1}{x}\right|}{4+x^2} \to \frac{1}{4}$, $x \to 0+$, aber $f(x) \to -\frac{1}{4}$, $x \to 0-$

$\Rightarrow f$ nicht stetig $\Rightarrow f$ nicht diffbar

$\alpha < -1: \; f(x) = \frac{x}{(4+x^2)x^{-\alpha}} = \frac{1}{(4+x^2)x^{-\alpha+1}} \to \infty$ für $x \to 0+$

$\to -\infty$ für $x \to 0-$

$f(0)=0$

$\Rightarrow f$ nicht stetig in $0 \Rightarrow f$ nicht diffbar in $0$

**b)** Bestimme alle lokalen und globalen Extremwerte von $f$ für $\alpha = 0$, sofern sie existieren.

$\alpha = 0: \; f(x) = \frac{x}{4+x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4+x^2-2x^2}{(4+x^2)^2} = \frac{4-x^2}{(4+x^2)^2} = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Da die Fkt mon. fällt auf $(-\infty,-2) \cup (2,\infty)$ und mon. w. auf $[-2,2]$

sind die globalen Extrema $x_1 = -2$, $x_2 = 2$.

**c)** Begründe, dass $f$ mit $\alpha = 1$ auf dem Intervall $[-2,2]$ eine Umkehrfunktion $f^{-1}$ besitzt. Berechnen Sie $(f^{-1})'(y_0)$ für $y_0 = f(1)$.

Da $f$ str. m. w. und stetig auf $[-2,2]$ ist, ex. $f^{-1}$ (siehe $f'(x) > 0 \; \forall x \in [-2,2]$)

Sei $y_0 = f(1) = \frac{1}{5}$

$f'(x) = \frac{4-x^2}{(4+x^2)^2} \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(1)} = \left(\frac{3}{25}\right)^{-1} = \frac{25}{3}$

**5. Aufgabe:**

Berechne für $x > 0$ die Ableitung von

$$f(x) := \sin\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)$$

$$f'(x) = \left(\sin\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)' = \cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)'$$

$$= \cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\cdot\left(\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot(1+\sqrt{x}) - \frac{1}{2\sqrt{x}}(1-\sqrt{x})}{1+2\sqrt{x}+x}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(-\frac{2}{2\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\right)$$

$= -\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{\ldots}\right)\left(\frac{1}{\ldots}\right)$

$$= -\cos\left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}\right)$$

**6. Aufgabe:**

Sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in (a, b)$ mit $x_0 \neq 0$ und $g(x) := xf(x)$ differenzierbar in $x_0$.
Beweise, dass dann auch $f(x)$ differenzierbar in $x_0$ sein muss und gib ein Gegenbeispiel dafür an, dass die Aussage nicht richtig ist für $x_0 = 0$.

- Gegenbsp. wenn $x_0 = 0$: $f(x) = |x|$, denn $x|x|$ ist diffbar in $x_0 = 0$, aber $|x|$ nicht.

- Beh: $g$ diffbar in $x_0 \neq 0 \Rightarrow f(x)$ ist diffbar in $x_0 \neq 0$

Bew: Wenn $g$ in $x_0$ diffbar ist, ex. der GW $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$

Zunächst zeigen wir die Stetigkeit von $f$ in $x_0$:

Da $g$ diffbar und somit auch stetig in $x_0$ ist, gilt:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} x \cdot f(x) = x_0 \cdot f(x_0) \qquad (1)$$

Es gilt $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ und da $x_0 \neq 0$ ist, muss $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ ex.
(Andernfalls würde $\lim\limits_{x \to x_0} x f(x)$ nicht ex.)

Somit gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} x f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = x_0 \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

und mit (1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Nun ist $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{x f(x) - x_0 f(x_0)}{x - x_0}$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x f(x) - x_0 f(x) + x_0 f(x) - x_0 f(x_0)}{x - x_0}$$

$$= \lim \left(f(x) + x_0 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right)$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left( f(x) + x_0 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right)$$

Da $f$ stetig ist, gilt $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Damit der GW $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

ex. kann, muss $\lim_{x \to x_0} x_0 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ ex. (*)

Wegen $\lim_{x \to x_0} x_0 \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = x_0 \lim \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, ex. $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ und

$f$ ist diffbar in $x_0$

(*) Existieren der GW $\lim (a_n + b_n)$ und der GW $\lim a_n$, so ex.

auch der GW $\lim (a_n + b_n) - (a_n) = \lim b_n$